## Ex 7.14

Soit $j$ le nombre de jours à attendre

$j = 7k$, $k$ nbre de semaines

$j = 29k'$, $k'$ nbre de mois lunaires

$7k = j = 29k'$, donc $7k = 29k'$

Donc $7 \mid 29k'$, or (Gauss) 7 premier avec 29, donc $7 \mid k'$

$k' = 7t$, $t \in \mathbb{Z}$, donc $j = 29k' = 203t$

Et $29 \mid 7k$, or (Gauss) 29 premier avec 7, donc $29 \mid k$

$k = 29t'$, $t \in \mathbb{Z}$, donc $j = 7k = 203t'$, donc $t = t'$.

La première occurrence du phénomène est pour $t = t' = 1$,

ie dans $j = 29 \times 7 = \underline{203 \text{ jours}}$. (puis tous les 203 jours).

## Ex 7.15 Type Bac

$x$ premier, $y, z \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = xy + 2x \end{cases}$$

1.a) $x^2 + y^2 = z = xy + 2x$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = xy + 2x$

$\Leftrightarrow y^2 - yx = 2x - x^2$

$\Leftrightarrow y(y-x) = x(2-x)$ (*)

1.b) D'après 1.a, $x \mid y(y-x)$

Comme $x$ est premier, $x \mid y$

ou $x \mid y - x$. Mais alors comme $x \mid x$, il vient $x \mid y$

Donc dans tous les cas, $x \mid y$.

2°) $y = kx$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.a) Mq $x | 2$ puis que $x = 2$

On a vu (1.a) que $y(y-x) = x(2-x)$ (*)

d'où $kx(kx - x) = x(2-x)$

$k^2x^2 - kx^2 = 2x - x^2$

$x^2(k^2 - k + 1) = 2x$

En divisant par $x$ membre à membre ($x \neq 0$ car positif)

$x(k^2 - k + 1) = 2$

Donc $x | 2$, donc $x \in \{1 ; 2 ; -1 ; -2\}$.

Or $x$ positif, donc $x = 2$.

2.b) $y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dans (*), il vient : $2k(2k - 2) = 2 \times \underbrace{(2-2)}_{0}$

Donc $2k(2k-2) = 0$

$k(k-1) = 0$

Donc $k \in \{0 ; 1\}$

3°) Pour $k = 0$ : $x = 2$ et $y = 0$

$z = 2^2 + 0^2 = 4$

vérification : $z = 2 \times 0 + 2 \times 2 = 4$ $S_1 = \{4\}$

Pour $k = 1$ : $x = 2$ et $y = 2$

$z = 2^2 + 2^2 = 8$

vérification : $z = 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8$ $S_2 = \{8\}$

Finalement, ~~$S = \{4 ; 8\}$~~ $S = \{(2 ; 0 ; 4) ; (2 ; 2 ; 8)\}$.

Examen ou concours : Série* :

Spécialité/option :

Repère de l' épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens.

Note : /20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

Cryptographie

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

erreur d'énoncé "On calcule d'abord ... de la div. eucl. de $(x+3)$ par 26 ..."

**62 07.16**

lettre non codée $\qquad$ lettre codée

$x \xrightarrow{f} f(x) \equiv x+3\ [26]\ ,\ 0 \leq f(x) < 26$

1°) DWWDTXH

2°) $g(x) \equiv x-3 \quad [26]$

3°) I D F L O H

F A C I L E

A B C D E F G H I J

K L M N O P Q R

**62 07.17**

$f(x) \equiv 21x + 11 \quad [26]$

1°) $R \to 17$ $\qquad$ (codeur "Ricolo")

$21 \times 17 + 11 = 368$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 26 \\ -26\ \ & 14 \\ 108 & \\ -104 & \\ 4 & \end{array}$$

$4 \longrightarrow E$

Donc R est codé par E.

$I \to 8$

$21 \times 8 + 11 = 179$

$$\begin{array}{r|l} 179 & 26 \\ -156 & 6 \\ 23 & \end{array}$$

$23 \to X$

Donc I est codé par X

$G \to 6$

$21 \times 6 + 11 = 137$

$$\begin{array}{r|l} 137 & 26 \\ -130 & 5 \\ 7 & \end{array}$$

$7 \to H$

Donc G est codé en H.

N° .../...

$O \to 14$

$21 \times 14 + 11 = 305$

$$\begin{array}{r|l} 305 & 26 \\ \hline -26 & 11 \\ 45 & \\ -26 & \\ \hline 19 & \end{array}$$

$19 \to T$

Donc O est codé en T

$L \to 11$

$21 \times 11 + 11 = 242$

$$\begin{array}{r|l} 242 & 26 \\ \hline -234 & 9 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$8 \to I$

Donc L est codé en I

Finalement RIGOLO
EXHTIT

2°) $x, x' \in [\![0, 25]\!]$ tq $f(x) \equiv f(x')$ $[26]$

2.a) $f(x) \equiv f(x')$ $[26]$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \quad 21x + 11 = 21x' + 11 + 26k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad 21(x - x') = \cancel{11 - 11} + 26k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad 21(x - x') = 26k.$

2.b) D'après ce qui précède, $26 \mid 21(x - x')$

Or 21 est premier avec 26 $\quad (21 = 3 \times 7, \ 26 = 2 \times 13)$

donc (Gauss) $\quad 26 \mid x - x'$

ie $\quad x - x' = 26k', \ k' \in \mathbb{Z}$,

ie $\quad (x - x') \equiv 0$ $[26]$

ie $\quad x \equiv x'$ $[26]$

Comme $x, x \in [\![0, 25]\!]$, il vient

$x = x'$.

3°) $21x + 11 \equiv y \quad [26]$

$21x \equiv y - 11 \quad [26]$ $\qquad$ Soit 3 l'inverse de 21 modulo 26

$x \equiv \left(\frac{y - 11}{21}\right) \times 3 \quad [26]$

N° …/…